BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

EPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1, exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 12].

a. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge ?

b. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.
Le temps d'attente T_2, exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.
Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 minute et 6 minutes.

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes.

- Le nombre de caisses automatiques est $n = 10$.
- La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p = 0{,}1$.
- Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :
« Plus de 90% des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. »
Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.
Cela remet-il en question l'affirmation du gérant ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.

Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geq 1$, on note :

- a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
- b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n.

1. Donner la matrice P_1.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2.

4. Sachant que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 0{,}1$.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = a_n - 0{,}4$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

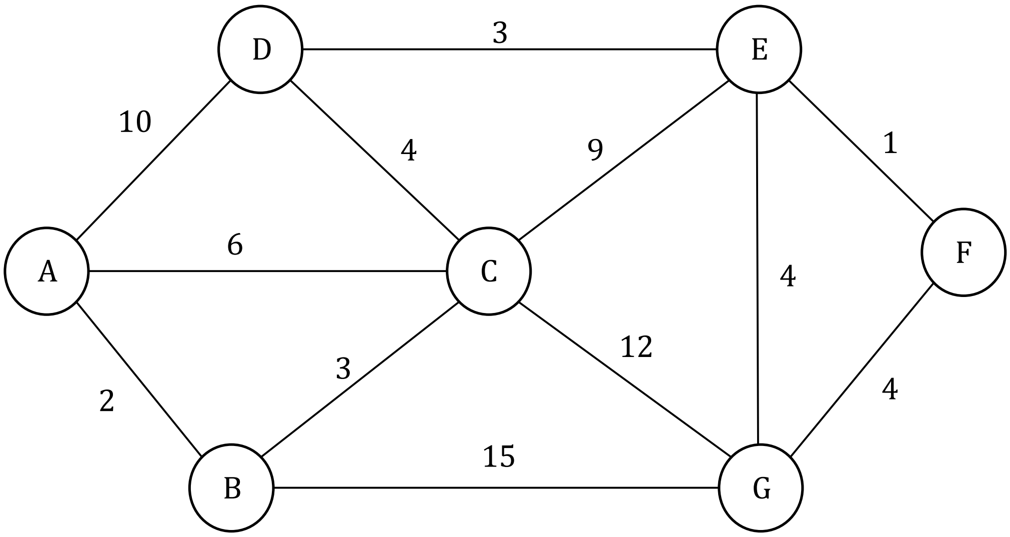
$$a_n = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4.$$

c. Préciser la limite de la suite (v_n).

d. Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?

PARTIE B

Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en le minimum de temps. Le graphe suivant schématise le parcours. L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours en minute entre les deux sommets qu'elle relie. Par exemple, le temps de parcours de C vers D, ou de D à C, est égal à quatre minutes.

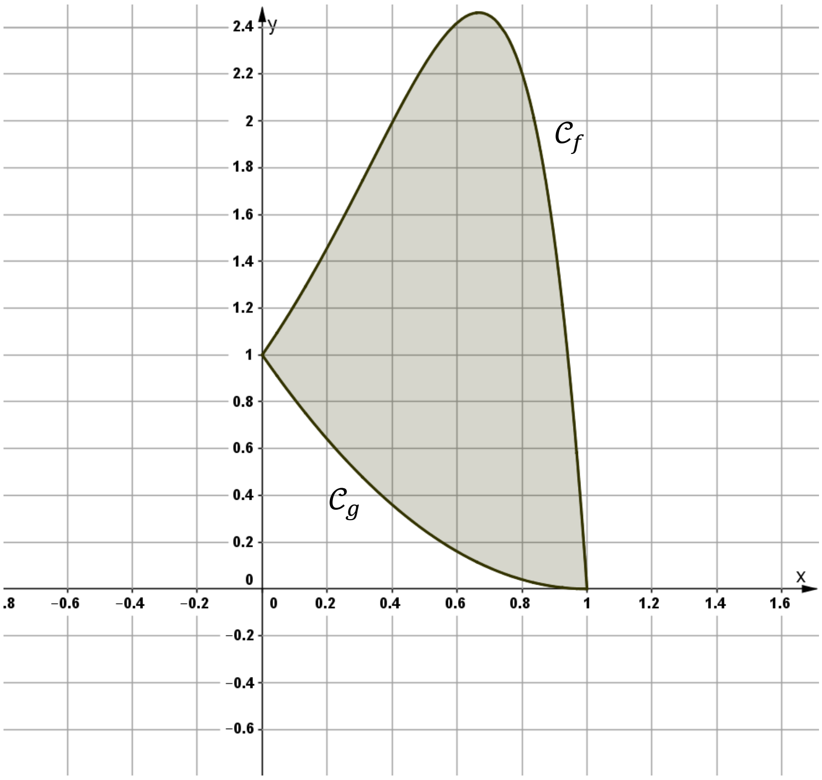


Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A à G en minimisant son temps de parcours ? Expliquer la démarche utilisée.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :
pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.
Leurs courbes représentatives seront notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

```
dériver((1-x)*exp(3x))
                    : -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)

factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))
                    : exp(3x)*(-3x+2)

factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))
                    : 3*exp(3*x)(1-3x)
```

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3x\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Étudier sur [0 ; 1] le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur [0 ; 1] en précisant les valeurs utiles.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1) sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. On admet que : pour tout x dans [0 ; 1], $f(x) - g(x) = (1 - x)(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x)$.

a. Justifier que pour tout x dans [0 ; 1], $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geq 0$.

b. En déduire que pour tout x dans [0 ; 1], $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geq 0$.

c. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans [0 ; 1].

3. **a.** Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}.$$

Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

Exercice 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.
Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c + 1) - \ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?

2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

a. *Premier cas.*

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).

À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

b. *Deuxième cas.*

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?